ノート

波動有限要素法によるサンドイッチ片持ちはりの解析

高田　省一＊1）

An analysis of a cantilevered sandwich beam using wave finite element method

Shoichi Takada＊1）

キーワード：制振，はり，粘弾性，損失係数，波動有限要素法，有限要素法

Keywords：Damping, Beam, Viscoelasticity, Loss factor, Wave finite element method, Finite element method

1.　まえがき

積層制振パネルの素材に用いられる粘弾性材の複素弾性率（ヤング率，損失係数等）の測定方法として，積層はり特性の逆算による（inferring）方法がある。これらの方法は，通常の音響振動測定用の測定器を用いて，材料が実用される周波数帯域の複素弾性率を測定できる利点があり，現時点で制定されている規格として，ASTM E756[1]がある。

この規格では，単層，二層および三層サンドイッチはり等の特性からの逆算方法が規定されている。ただし，制振材料として重要な比較的軟らかい材料に適するサンドイッチはりを用いる方法については，規定された固定部付き試験片の用意が難しく，逆算式の精度が不明な点が指摘されてきた。そのため，三次元有限要素法による逆算も試みられ，有効性が報告されている[2]。しかしながら，実用的な方法とするには，より計算量の少ない方法を用いる必要がある。

本研究では，そのような解析方法として，筆者が以前開発した粘弾性材に対する波動有限要素法[3]に境界条件を適用し，強制加振時の機械インピーダンス特性を計算する方法を検討した。ここでは，その計算処理の概要を記し，従来の解析的数値解[4],[5]との比較により，妥当性を検証する。なお，ここでの解析は，図 1 に示すように，有限要素法としては厚さ方向 x_2 のみの分割による一次元解析，現象的には厚さ方向 x_2 および伝播方向 x_1 の二次元解析とする。また，要素は 2 次要素を使用する。

2.　計算方法

2.1　波動の有限要素法による伝播モードの解析　図 1 の無限長はりにおいて，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を次式で表す。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{NU} \exp j\left(\Omega t - \xi x_1\right) \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに，$\boldsymbol{U}$ は節点変位ベクトル，$\boldsymbol{N}$ は形状関数マトリックス，Ω は角振動数（実数），ξ は伝播定数（複素数）である。履歴減衰系（粘弾性）の場合には，外力 0 の時，ξ に

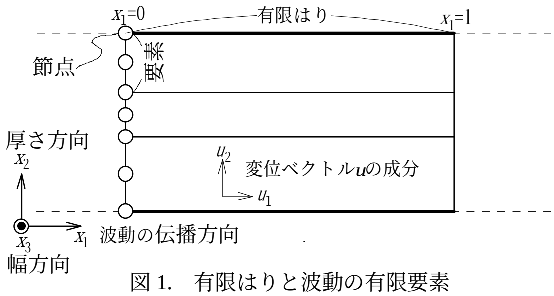

図 1.　有限はりと波動の有限要素

ついて 2 次，1 次，0 次の項を含む固有方程式となり，演算量の多い特殊な解法が必要となる。ところが，弾性率の対称性がある条件を満足する場合（等方性は当然含まれる）には，相似変換により ξ の 1 次の項を消去し，一般型の固有方程式に変換することができる[3]。

ここでの二次元解析においては，各節点は x_1 方向および，x_2 方向の 2 自由度を持つので，節点数を N とすれば，固有方程式は 2N 次となる。したがって，2N 個の固有値があり，そのうちのたとえば ξ_i^2 は，$\pm\xi_i$ による互いに伝播方向が逆向きで鏡像的な 2 つのモードを示すので，モード数としては 4N 個となる。

2.2　境界条件の設定　角振動数 Ω における強制応答振幅を求めるには，加振力を含む境界条件により，4N 元の連立一次方程式を構成し，モード振幅を求める必要がある。

（1）固定境界条件　単純にモードの合成による節点変位を 0 にすれば良い。

（2）自由境界条件　軸方向応力 T_1 およびせん断応力 T_6 が，はりの端部 $x_1 = 0$ または $x_1 = l$ で 0 になることであるので，各節点での応力値の係数を境界条件方程式の係数とする。ただし，有限要素間で共有される節点において，応力計算値が不連続となるため，それらの平均値を用いる。

（3）先端加振条件　ここで設定する加振力は，はりの先端の最下点で厚さ方向に働く加振力である。一般的なはりの理論では，加振力をモーメントの微分により求めるが，これは，回転慣性を無視する近似において，本来の加振力であるせん断力に一致するためである。そこで，ここでは，せん断力そのものを加振外力に関係付けることとする。両

＊1） 光音グループ

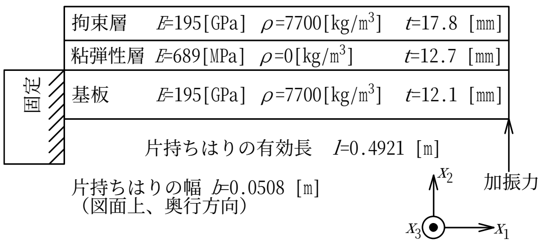

図 2. Douglas-Yang[4]による片持ちはりの例

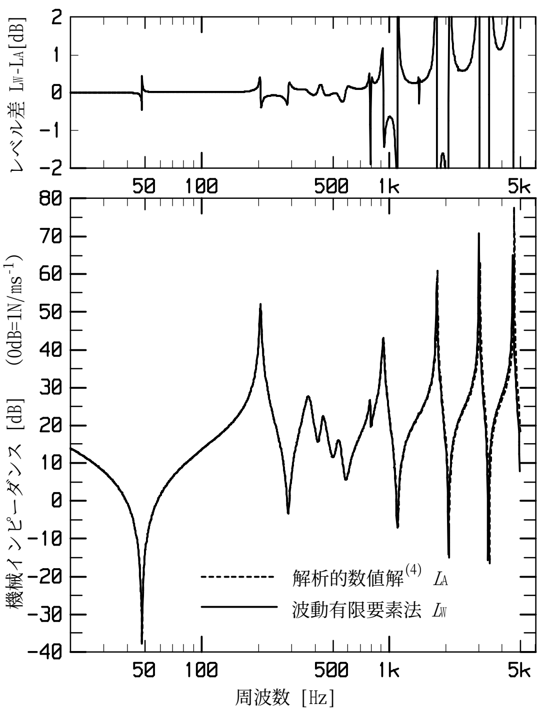

図 3. FEM と解析的近似の比較：片持ちはり

者による機械インピーダンス特性がほぼ一致することは確認済みである。要素ごとに，せん断力を求める式の係数を計算し，合計することで境界条件方程式の係数を決定する。そして，この方程式を，加振点における $T_6 = 0$ の式に置き換える。

（4）両端自由中央加振はりの場合　自由境界条件は第 1 項と同じであるが，これは一端のみに設定する。そして，もう一端の分の代りとするのが，中央における対称条件であり，$u_1 = 0$ および $u_{2,2} = 0$（$_{,2}$ は x_2 に関する微分を示す）である。加振力は第 3 項と同様にせん断力により決定し，その式で，加振点における $u_{2,2} = 0$ の式を置き換える。

3. 計算例

図 2 に示す厚いコアを持つはりの機械インピーダンス特性を計算した結果を図 3 に示す。Douglas-Yang[4]の解析的数値解による計算値と比べた差分が，700 Hz までは 0.5 dB にとどまり，良く一致している。なお，ここでは，有限要素法を解析的近似に近づけるため，計算用の，基板および拘束層のせん断弾性率を 1000 倍し，せん断ひずみが生じにくくしている。なお，高周波側の差が大きい原因として，板厚が大きいため，解析的近似では無視されている回転慣性の影響が大きいことが推定される。

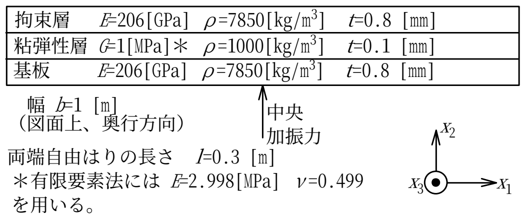

図 4. 中央加振はりの例

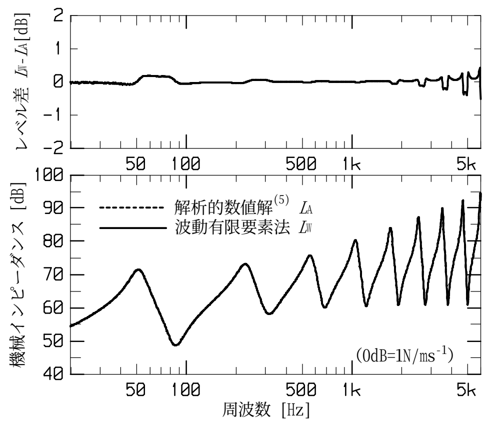

図 5. FEM と解析的近似の比較：中央加振はり

図 4 に示す，粘弾性層のせん断ひずみにより制振効果が得られるサンドイッチ制振鋼板の両端自由はりにつき，柴田らの解析方法[5]による結果との比較を図 5 に示す。4 kHz までの周波数範囲で，計算方法による機械インピーダンスのレベル差が，0.3 dB にとどまり，この問題に対し，2 つの解析法は概ね等価と考えられる。

4. むすび

有限要素解析の有効性を示すものと考えられる。今後さらに，三次元化への拡張を検討し，複素弾性率の高精度逆算手法を確立してゆきたい。

（平成 21 年 7 月 9 日受付, 平成 21 年 8 月 14 日再受付）

文　献

(1) ASTM E 756-05 "Standard Test Method for Measuring Vibration -Damping Properties of Materials"

(2) Hambric, S. A., Jarret, A. W., Lee. G. F., Fedderly, J. J. : "Inferring Viscoelastic Dynamic Material Properties From Finite Element and Experimental Studies of Beams With Constrained Layer Damping", J Vib Acoust, Vol.129, pp. 158-168 (2007)

(3) 高田省一：「有限要素法による積層制振梁の損失係数計算法」，日本音響学会誌，Vol.51，No.4 pp. 259-271 (1995)

(4) Douglas, B. E. and Yang, J. C. S. : "Transverse compressional damping in the vibratory response of elastic-viscoelastic-elastic beams", AIAA Journal, Vol.16, No.9, pp. 925-930 (1978)

(5) 柴田勝久,伊藤耿一,遠藤紘,門脇伸生,松岡徹郎：「制振鋼板のはりの損失係数におよぼす支持条件の影響」，日本機械学会論文集，Vol.60, No.580, C 編, pp. 4092-4097 (1994)